

Arithmétique

I. Vocabulaire et définitions

a) Qu'est-ce qu'une division euclidienne ?



Définition : Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier **a** (le **dividende**) par un nombre entier **b** (le **diviseur**, non nul), c'est trouver deux nombres entiers **q** (le **quotient**) et **r** (le **reste**) tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

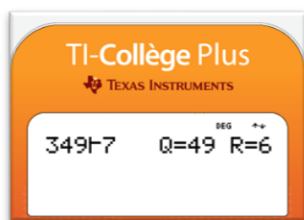
(Le reste doit toujours être plus petit que le diviseur).

Effectuer la division euclidienne de 349 par 6 :

Dans 349 combien y-a-t-il de 6 ?

Dans 349, il y a 49 fois 6 et il reste 5 Soit $349 = 49 \times 6 + 5$

Avec la calculatrice, on peut effectuer la division euclidienne de 349 par 6



Euclide 300 avant J-C

Exercice d'application

- Effectue la division euclidienne de 183 par 12.
- $278 = 6 \times 45 + 8$: quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

b) Comment savoir si un nombre est diviseur d'un autre nombre ?

Définition : Un nombre **a** est **divisible** par un nombre **b** lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est **nul**.

C'est-à-dire que le quotient de a par b est un **nombre entier**.

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Remarques :

- 1 est un diviseur de tout entier
- Chaque entier est divisible par lui-même.

Exemple :

- 18 est divisible par 6 car $18 = 6 \times 3 + 0$

On dit que 6 et 3 sont des diviseurs de 18 et que 18 est un multiple de 6 et de 3.

c) Connaître les critères de divisibilité



Un critère de divisibilité est un moyen de savoir si un nombre est divisible par un autre nombre sans avoir à poser la division.

Un nombre entier est divisible :

- ☐ par 2, si son chiffre des unités est pair
- ☐ par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5
- ☐ par 10, si son chiffre des unités est 0
- ☐ par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- ☐ par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9
- ☐ par 4, si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

Exemples :

81 630 est...

- ☐ divisible par 2 parce qu'il est pair ;
- ☐ divisible par 5 parce que son chiffre des unités est 0 ;
- ☐ divisible par 3 parce que $8 + 1 + 6 + 3 + 0 = 18$ et 18 est divisible par 3 ($3 \times 6 = 18$).
- ☐ divisible par 9 parce que $8 + 1 + 6 + 3 + 0 = 18$ et 18 est divisible par 9 ($9 \times 2 = 18$).

Exercice d'application

- 1 290 est-il divisible par :
 - 2 ?
 - 3 ?
 - 5 ?
 - 9 ?

Propriété : Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre entier n , on teste la divisibilité de n par tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Exemple : Pour trouver tous les diviseurs de 100, on teste la divisibilité avec tous les entiers inférieurs ou égaux à 10.

Exercice d'application

- 28
- 120
- 162
- 225

II. Nombres premiers



a) Activité :

Trouver tous les diviseurs de 137.

b) Définition :

Un **nombre premier** est un nombre qui possède **exactement 2** diviseurs : **1** et **lui-même**.

Exemples :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47...

6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme diviseurs

7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et 7.

⚠ **Attention :** 1 n'est **pas** premier (il n'a qu'un seul diviseur).

Exercice :

Déterminer si le nombre 677 est premier.

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

c) Activité : le crible d'Ératosthène

La méthode du crible consiste à :

- Dresser la liste des entiers compris entre 2 et 100 ;
- Eliminer tous les multiples de 2, sauf 2, puisque tous ces nombres sont divisibles par 2, donc pas premiers ; le premier entier non supprimé est 3, qui est premier.
- Eliminer tous les multiples de 3, à partir de $3^2 = 9$ (car $3 \times 2 = 6$ a déjà été supprimé) ; le premier entier restant est 5, qui est premier.
- Eliminer les multiples de 5 restants, à partir de $5^2 = 25$ (car 5×2 , 5×3 et 5×4 ont été supprimés) ; le plus petit entier restant est 7, qui est premier.
- Eliminer les multiples de 7 restants, à partir de $7^2 = 49$ (même raisonnement). Comme $11^2 > 100$, tous les nombres restants sont premiers.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

III-Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Propriété (admise)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Exemple

$$60 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$$

Propriété

Pour un entier naturel donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers (sans tenir compte de l'ordre des facteurs).

Méthode pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers



Pour décomposer 300, on commence par le diviser par le plus petit nombre premier qui est 2 car 300 est pair, ensuite 3 ... et on s'arrête quand on obtient 1.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

La décomposition de 300 est $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

Applications de la décomposition

a-Diviseurs d'un nombre entier

Comment trouver tous les diviseurs d'un nombre entier à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers ?

Trouver tous les diviseurs de 40

Première méthode :

Pour trouver tous les diviseurs de **40**, on commence par sa décomposition en facteurs premiers :

$$40 = 2^3 \times 5^1$$

Ensuite, on forme tous les produits possibles avec les puissances de 2 et de 5 :

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

- Puissances de 2 : $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ soit 1, 2, 4, 8
- Puissances de 5 : $5^0, 5^1$ soit 1, 5

On multiplie chaque nombre de la première liste par chaque nombre de la deuxième :

×	1	5
1	1	5
2	2	10
4	4	20
8	8	40

Les diviseurs de 40 sont donc :

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Deuxième méthode : On peut aussi tester les nombres jusqu'à $\sqrt{40} \approx 6,3$:



- 1 divise 40 → paire : (1, 40)
- 2 divise 40 → paire : (2, 20)
- 4 divise 40 → paire : (4, 10)
- 5 divise 40 → paire : (5, 8)

On récupère ainsi tous les diviseurs :

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Il y a **8 diviseurs** au total.

b-Fractions irréductibles

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.



Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

$$\begin{aligned} \frac{1014}{84} &= \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 13^2}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 7} \\ &= \frac{13^2}{2 \times 7} \\ \frac{1014}{84} &= \frac{169}{14} \end{aligned}$$

Donc on obtient la fraction sous forme irréductible :

$$\boxed{\frac{1014}{84} = \frac{169}{14}}$$

c-Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers

On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.

On recherche les facteurs communs des deux entiers

On calcule alors le produit des facteurs communs.

Pour résumer, le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b.

Exemple :

Calcul du Plus Grand Commun Diviseur de 126 et 180

$$\begin{cases} 180 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 5 \\ 126 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 = \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 2 \times 5 \\ 126 = \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 = \boxed{18} \times 10 \\ 126 = \boxed{18} \times 7 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 180 et 127 est donc 18.

Exercice d'application numéro 1:

Un fleuriste possède un lot de 126 tulipes et 450 roses, il souhaite réaliser des bouquets ayant la même composition.

Combien peut-il en réaliser ?

Quel est le nombre maximal de bouquets qu'il peut réaliser ? Justifiez votre réponse.



Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Exercice d'application numéro 2 : multiples ou diviseurs ?

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?



★ **POUR ALLER PLUS LOIN (Défis pour les rapides)**

Défi – PPCM (Plus Petit Commun Multiple)

Définition : Le PPCM de deux nombres est le plus petit multiple (non nul) qu'ils ont en commun.

Méthode avec les facteurs premiers :

1. Décomposer chaque nombre.
2. Prendre tous les facteurs premiers présents, en prenant le plus grand exposant pour chacun.

Exemple : PPCM(60 ; 84)

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 ; 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

On prend 2^2 , 3, 5 et 7 $\rightarrow$ PPCM = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

À toi de jouer : Calcule le PPCM des couples suivants.

a) PPCM(42 ; 70) = _____

b) PPCM(90 ; 144) = _____

Réponse : _____

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

RÉSUMÉ ESSENTIEL À RETENIR (À APPRENDRE PAR CŒUR)

Division euclidienne : $\text{Dividende} = \text{Diviseur} \times \text{Quotient} + \text{Reste}$ (avec $\text{Reste} < \text{Diviseur}$).

Diviseur / Multiple : Si le reste de la division est 0, alors le diviseur divise le nombre.

Nombres premiers : Ils ont exactement 2 diviseurs : 1 et eux-mêmes. (Ex: 2, 3, 5, 7, 11...)

Décomposition : On décompose en multipliant des nombres premiers (ex: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$).

PGCD : On prend les facteurs communs avec le plus petit exposant.

AUTO-ÉVALUATION (Bilan personnel)

Compétences

1. Je sais poser une division euclidienne et trouver le quotient/reste.
2. Je sais reconnaître si un nombre est diviseur ou multiple d'un autre.
3. J'applique les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10.
4. Je reconnais un nombre premier parmi une liste.
5. Je décompose un nombre en produit de facteurs premiers (puissances).
6. Je simplifie une fraction pour la rendre irréductible
7. Je calcule le PGCD de deux nombres en utilisant la décomposition.
8. Je résous un problème concret en utilisant le PGCD.